

Bem : Sei λ ein Borel-Maß

auf X . Dann gilt:

λ Borel-regulär $\iff$

$$\lambda(A) = \inf \{ \lambda(B) : B \in \mathcal{B}(X), B \supset A \}$$

für alle $A \subset X$

Beweis: $\implies$ " klar!

$\Leftarrow$ " : Sei $A \subset X$. Z.z. :

" $\exists B \in \mathcal{B}(X), B \supset A$ mit

$$\lambda(A) = \lambda(B).$$

Nach Vor. gibt es zu $n \in \mathbb{N}$

Mengen $B_n \in \mathcal{B}, B_n \supset A$, mit

$$\lambda(B_n) - \frac{1}{n} \leq \lambda(A)$$

(Def. des „inf“) Setze

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \implies$$

$B \in \mathcal{B}$, $B \supset A$ und

$$\lambda(B) \leq \lambda(B_n) \leq \lambda(A) + \frac{1}{n}$$

$$\implies_{n \rightarrow \infty} \lambda(B) \leq \lambda(A); \quad \text{„} \gg \text{“ ist klar} \quad \square$$

beweise zur Übung

Satz 23.3 : Sei λ ein Borel-
reguläres Maß auf X . Ist A
 eine Borel-Menge, so ist $\lambda \ll A$
 ebenfalls Borel-regulär und für
 $\lambda(A) < \infty$ sogar ein Radon-Maß.

Tiefer sind folgende Aussagen

Satz 23.4 : Approximationssatz
für Borel- und Radon-Maße

a) Sei X ein metrischer Raum und
 λ ein Borel-Maß. Ist $B \in \mathcal{B}(X)$,
 $\lambda(B) < \infty$, so gibt es zu jedem
 $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge C
mit

$C \subset B, \quad \lambda(B - C) < \varepsilon.$

(Approximation von innen durch
abgeschlossene Mengen)

b) Sei λ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$.
Ist $B \in \mathcal{B}(X)$, so findet
man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene

Menge U mit

-214-

$$\boxed{B \subset U, \quad \lambda(U-B) < \varepsilon.}$$

(Approximation von außen durch
offene Mengen)

Zusatz: (Radon - Maße auf $\mathbb{R}^n$)

Sei λ ein Radon - Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Dann gilt

$$(i) \quad \lambda(A) = \inf \{ \lambda(U) : U \text{ offen } \supset A \} \\ \forall A \subset X$$

$$(ii) \quad \lambda(A) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ Kompakt } \\ \subset A \} \\ \forall A \in \mathcal{M}_\lambda$$

("Zusatz" $\leadsto$ Satz 6, p. 52, Grütter)

Beweisskizze zu Satz 23.4:

a) Sei also $B \in \mathcal{B}(X)$ mit $\lambda(B) < \infty$

Setze $\nu := \lambda \llcorner B$

(endliches Borel-Maß!)

und

$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{M}_\lambda : \text{zu jedem } \varepsilon > 0$

existiert eine abgeschlossene

Menge $C_\varepsilon \subset A$ mit

$\nu(A - C_\varepsilon) < \varepsilon \}$

Zeige:

- abgeschlossene Mengen $\in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ stabil gegen $\bigcap_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}$

- Offene Teilmengen $\in \mathcal{F}$

(beachte hier

$$(\text{offen}) \mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathcal{U} : \text{dist}(x, X - \mathcal{U}) \geq \frac{1}{i}\}$$

$\uparrow$
abgeschlossen

$\mathcal{F}^*$ ist nicht stabil gegen abgeschlossen Komplemente!

Setze daher weiter:

$$\mathcal{F}^* := \{A \in \mathcal{F} : X - A \in \mathcal{F}\}$$

und zeige:

- $\mathcal{F}^*$ stabil gegen $\bigcup_{i=1}^{\infty}$

- offene Mengen $\in \mathcal{F}^*$

Insgesamt: $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^* \text{ } \sigma\text{-Algebra,} \\ \mathcal{F}^* \supset \mathcal{B}(X) \end{array} \right\} \quad \nabla$

Unsere Borel-Menge B gehört also zu $\mathcal{F}^*$, speziell $\boxed{B \in \mathcal{F}}$, also existiert zu $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge G_ε mit $G_\varepsilon \subset B$ und

$$\lambda(B - G_\varepsilon) = \nu(B - G_\varepsilon) < \varepsilon.$$

b) Jetzt: $\lambda = \underline{\text{Radon}}$ Maß auf $\mathbb{R}^n$

Sei $B \in \mathcal{B}(X)$. Setze

$$U_m := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < m\}, m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow U_m - B \in \mathcal{B}(X)$$

$$\text{mit } \lambda(U_m - B) \leq \lambda(U_m) \leq$$

$$\lambda(\overline{U_m}) < \infty \quad (!)$$

-218-

Hier geht $X = \mathbb{R}^n$ ein: Dann
 ist $\overline{U}_m$ kompakt, hat also endliches
 λ -Maß.

$\Rightarrow \exists$ abgeschlossene Menge $C_m \subset U_m - B$,
a)
 $\lambda((U_m - B) - C_m) \leq \varepsilon 2^{-m}$,

wobei $\varepsilon > 0$ vorgegeben ist. Setze

$$U := \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m - C_m)$$

und prüfe:

• U offen $\supset B$

• $\lambda(U - B) \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} &\supset U_m - (U_m - B) \\ &= U_m \cap B \end{aligned}$$



("Zusatz": selbst beweisen!)
 "

Hinweis zum Zusatz:

-219-

Sei λ Radon Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(i) Zu $A \subset X$ existiert $B \in \mathcal{B}(X)$

$B \supset A$, mit $\lambda(A) = \lambda(B)$, denn

als Radon Maß ist λ Borel regulär

(vgl. Def. 23.4). Gemäß Satz 23.4 b)

gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine offene Obermenge

U von B mit $\lambda(U - B) < \varepsilon$.

Es folgt $U \supset A$ und

$$\lambda(U - A) = \lambda((U - B) \cup (B - A))$$

$$\leq \lambda(U - B) + \lambda(B - A)$$

0, ε , sei $\lambda(A) < \infty$. Sonst ist

die Behauptung trivial. Dann gilt

$$\lambda(B-A) = \lambda(B) - \lambda(A)$$

$$= 0 \implies$$

$$\lambda(U-A) < \varepsilon \implies \lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$$

woraus $\lambda(A) = \inf \{ \lambda(V) : V \text{ offen}, A \subset V \}$

folgt.

($A \in \mathcal{M}_\lambda$ entfällt)

Satz 23.4

zu

(ii) Sei $A \in \mathcal{B}(X)$

$\implies$

jedem ε existiert $\mathcal{Q}$ abgeschlossen,

$\mathcal{Q} \subset A$, mit $\lambda(A - \mathcal{Q}) < \varepsilon$.

Nun betrachte

$$\mathcal{Q}_m := \mathcal{Q} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq m\}$$

und ersetze $\mathcal{Q}$ durch die kompakte

Menge $\mathcal{Q}_m$, $m \gg 1$.

Wie entscheidet man „praktisch“,
ob ein gegebenes Maß auf einem
metrischen Raum ein Borel Maß ist?

Satz 23.5 (Kriterium von Caratheodory)

Erfüllt das Maß λ auf dem
metrischen Raum X die Bedingung

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

$$\forall A, B \subset X, \quad 0 < \text{dist}(A, B)$$

$$=: \inf \{ d(a, b) : a \in A, b \in B \},$$

so ist λ ein Borel Maß, d.h.

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\lambda.$$

Beweis: Zeige

$$\boxed{C \text{ abgeschlossen} \implies C \in \mathcal{M}_1}$$

Das ergibt die Beh. Für alle $A \subset X$
ist also zu beweisen ($A = \underline{\text{Testmenge}}$)

$$(*) \quad \lambda(A) \geq \lambda(A \cap C) + \lambda(A - C)$$

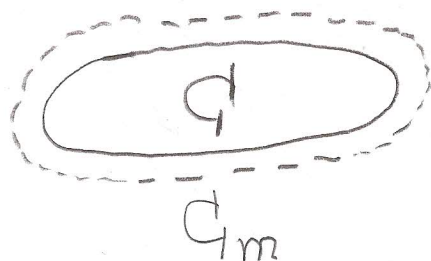
Hierbei $0 \leq \lambda(A) < \infty$.

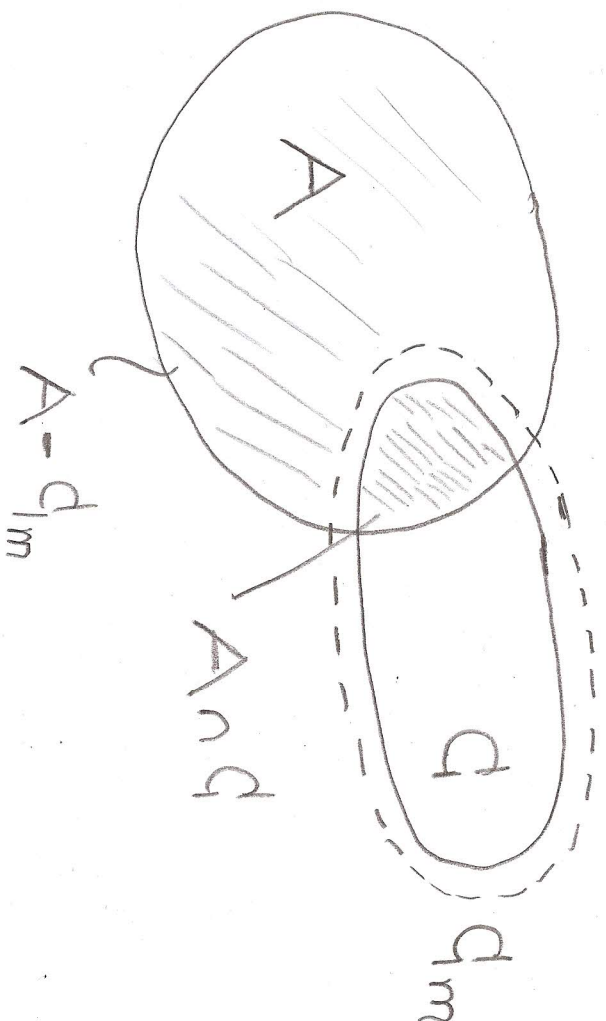
Setze ($m \in \mathbb{N}$)

$$C_m := \{x \in X : \text{dist}(x, C) \leq 1/m\}$$

$$(\text{dist}(x, C) := \inf \{d(x, c) : c \in C\})$$

$C_m =$ äußere Parallelmenge zu C
im Abstand $1/m$





offenbar : $\text{dist}(A - d_m, A \cap C) \geq \frac{1}{m}$

$$\Rightarrow \lambda(A - d_m) + \lambda(A \cap C) =$$

$$\underline{\underline{\text{Vor.}}} \quad \underbrace{\lambda((A - d_m) \cup (A \cap C))}_{\subset A} \leq \lambda(A)$$

Wir bekommen daraus $(*)$, falls

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(A - d_m)$$

$(**)$

$$= \lambda(A - C)$$

richtig ist.

ad **: betrachte die Streifen

$$R_k := \left\{ x \in A : \frac{1}{k+1} < \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}$$

$$\Rightarrow A - C = (A - C_m) \cup \bigcup_{k=\underline{m}}^{\infty} R_k \quad \textcircled{\begin{smallmatrix} ** \\ * \end{smallmatrix}}$$

beachte: $j \geq i+2 \Rightarrow \text{dist}(R_i, R_j) > 0$

Die Vor. + Induktion ergeben:

$$\sum_{k=1}^N \lambda(\underline{R_{2k}}) = \lambda\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^N R_{2k}}_{\subset A}\right)$$

Monotonie
 $\leq \lambda(A)$

$$\sum_{k=1}^N \lambda(R_{2k+1}) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^N R_{2k+1}\right) \leq \lambda(A)$$

Zusammen: $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) < \infty$

Aus $\textcircled{*}$ folgt (Monotonie!)

$$\lambda(A - G_1) \leq \lambda(A - G_m) + \sum_{k=m}^{\infty} \lambda(R_k)$$

mit $\sum_{k=m}^{\infty} \lambda(R_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Das liefert $\textcircled{**}$.

$\square$ $\uparrow$ Lektion 14

Volumenmessung in $\mathbb{R}^n$:

das n -dimensionale Lebesgue Maß $\mathcal{L}^n$